Lista de Exercícios 4 – Cálculo I

Exercício 5 página 132: Determine as assíntotas verticais e horizontais (se existirem) e interprete os resultados encontrados relacionando-os com o comportamento da função:

a) $f(x) = \dfrac{x+3}{2-x}$

Antes de começar a calcular os limites de uma função com a finalidade de encontrar as assíntotas verticais e horizontais, é importante calcular o domínio D da função, pois isto nos dará informações importantes sobre as assíntotas verticais.

Encontrando o domínio D da função $f(x)$:

O denominador da fração $\dfrac{x+3}{2-x}$ deve ser diferente de zero, logo temos:

$$2 - x \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad -x \neq -2 \qquad \Rightarrow \qquad x \neq 2$$

Não existem mais restrições aos valores que x pode assumir condicionados a existência de $f(x)$, logo o domínio D da função $f(x)$ será:

$$D = \{x \in \mathbb{R} : \; x \neq 2\}.$$

Sabendo que $x = 2$ não pertence ao domínio da função, podemos calcular o limite da função $f(x)$ quando x se aproxima de 2 com a finalidade de verificar se existe uma assíntota vertical neste ponto.

Calculando o limite obtemos $\lim_{x \to 2} f(x) = \infty$, porém não sabemos se é positivo ou negativo. Para isso precisamos calcular os limites laterais:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x+3}{2-x} = -\infty, \text{ pois } 2 - x < 0 \text{ quando } x \to 2 \text{ pela direita e}$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x+3}{2-x} = +\infty, \text{ pois } 2 - x > 0 \text{ quando } x \to 2 \text{ pela esquerda.}$$

Como conseqüência, temos que a reta $x = 2$ é uma assíntota vertical da função $f(x)$.

Agora para tentar encontrar assíntotas horizontas devemos calcular o limite da função $f(x)$ quando x tende a $\pm \infty$

Utilizando a regra para o cálculo de limites de divisão de polinômios quando x tende a $\pm \propto$ temos:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+3}{2-x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x\left(\frac{2}{x}-1\right)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\left(\frac{2}{x}-1\right)} = -1$$

Logo existe uma assíntota horizontal de equação $y = -1$.

Portanto as assíntotas são $x = 2$ e $y = -1$.

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+4}$

Determinando o domínio D da função $f(x)$:

Sabemos que o denominador da fração deve ser diferente de 0, porém $x^2 + 4 > 0$ para todo x. Logo, $D = \mathbb{R}$.

Como não há restrições para os valores de x para a função $f(x)$, não temos assíntotas verticais.

Para encontrar assíntotas horizontais (se existirem) basta calcular o limite da função $f(x)$ quando x tende a $\pm\infty$:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2+4}$$

Usando a regra para os cálculos de limites de polinômios quando x tende à $\pm\infty$ temos:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} \Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} 1 \Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$$

Portanto existe uma assíntota horizontal de equação $y = 1$

c) $g(x) = \dfrac{3}{x^2-4}$

Encontrando o domínio da função $g(x)$:

Sabemos que o denominador da fração tem que ser diferente de 0, logo temos:

$$x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq \pm\sqrt{4} \Rightarrow x \neq \pm 2$$

Portanto o domínio D da função $f(x)$: $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 2\}$

Agora vamos procurar as assíntotas verticais e horizontais:

Calculando o limite de $g(x)$ quando x tende a (-2) temos:

$$\lim_{x\to -2^{\pm}} g(x) = \lim_{x\to -2^{\pm}} \frac{3}{x^2-4} = \mp\infty$$

Logo existe uma assíntota vertical de equação $x=-2$.

Calculando o limite de $g(x)$ quando x tende a 2 temos:

$$\lim_{x\to 2^{\pm}} \frac{3}{x^2-4} = \pm\infty .$$

Logo existe uma assíntota vertical de equação $x=2$.

Encontrando as assíntotas horizontais de $g(x)$:

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{3}{x^2-4} = 0$$

Logo existe uma assíntota horizontal de equação $y=0$.

Esta assíntota horizontal nos diz que para valores muito grandes de x, a função g(x) se aproxima do valor 1.

As assíntotas verticais nos dizem que a função cresce ou decresce muito rapidamente quando x se aproxima de 2 ou quando x se aproxima de -2.

d) $y=\dfrac{1}{x^2-x}$

Para não confundirmos a função $y=\dfrac{1}{x^2-x}$ com uma equação, utilizaremos a notação $y=y(x)$ para a função.

Primeiramente, encontraremos o domínio D da função $y(x)$:

Sabemos que o denominador da fração $\dfrac{1}{x^2-x}$ deve ser diferente de 0, logo temos:

$$x^2-x\neq 0 \quad \Rightarrow \quad x(x-1)\neq 0 \quad \Rightarrow \quad x\neq 0 \text{ ou } x\neq 1$$

Portanto o domínio D da função $y(x)$ é: $D=\{x\in\mathbb{R}: x\neq 0 \text{ ou } x\neq 1\}$.

Como $x=0$ e $x=1$ não podem ser utilizados pela função $y(x)$, tentaremos descobrir o que acontece com a função $y(x)$ quando x se aproxima de 0 e quando x se aproxima de 1.

Calculando o limite de $y(x)$ quando x tende a 0:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2-x}=\infty \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 0} y(x)=\infty .$$

Logo, existe uma assíntota vertical de equação $x=0$.

Calculando o limite de $y(x)$ quando x tende a 1 pela direita:

$$\lim_{x\to 1^{\pm}}\frac{1}{x^2-x}=\lim_{x\to 1^{\pm}}\frac{1}{x(x-1)}=\pm\infty \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 1} y(x)=\pm\infty$$

Logo existe assíntota vertical de equação $x=1$.

Para encontrar assíntotas horizontais, basta calcular o limite de $y(x)$ quando x tende a $\pm\infty$. Calculando o limite de $y(x)$ quando *x* tende a $+\infty$:

$$\lim_{x\to \infty}\frac{1}{x^2-x}=0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to \infty} y(x)=0$$

Logo existe uma assíntota horizontal de equação $y=0$.

A assíntota horizontal nos diz que quando x aumenta ou diminui muito a função $y(x)$ se aproxima de 0.

As assíntotas verticais nos dizem que quando x se aproxima de 0 e de 1, a função $y(x)$ cresce ou diminui muito, dependendo do lado pelo qual ocorre a aproximação de $x=1$ e de $x=0$.

e) $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x-2}$

Novamente, encontraremos o domínio da função $f(x)$:

Sabemos que o denominador da fração $\dfrac{x^2-x}{x-2}$ deve ser diferente de 0, logo temos:

$$x-2\neq 0 \quad\Rightarrow\quad x\neq 2$$

Logo o domínio D da função $f(x)$ é: $D=\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq 2\}$

Iremos calcular o limite de $f(x)$ quando x tende a 2. Se esse limite for igual a $\pm\infty$ teremos uma assíntota vertical:

$$\lim_{x\to 2^{\pm}}\frac{x^2-x}{x-2}=\lim_{x\to 2^{\pm}}\frac{2}{0}=\pm\infty \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 2^{\pm}} f(x)=\pm\infty .$$

Logo temos uma assíntota vertical de equação $x = 2$.

Para encontrar assíntotas horizontais, basta calcular o limite de $f(x)$ quando x tende a $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2 - x}{x-2}$$

Para calcular este limite, podemos utilizar a regra para cálculos de limites com divisão de polinômios e x tendendo a $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x} \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to\infty} x \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

Logo não existe assíntota horizontal para esta função.

Com relação a assíntota vertical de $f(x)$, podemos dizer que quando x se aproxima de 2, a função $f(x)$ aumenta muito ou diminui muito, dependendo se nos aproximarmos de x pela esquerda ou pela direita.

f) $y = \dfrac{x^2 - 3}{(x-1)^2}$

Para não confundir a função $y = \dfrac{x^2 - 3}{(x-1)^2}$ com uma equação, escreverei $y(x)$.

Encontrando o domínio da função $y(x)$:

Sabemos que o denominador da fração $\dfrac{x^2 - 3}{(x-1)^2}$ deve ser diferente de 0, logo temos:

$$(x-1)^2 \neq 0 \quad\Rightarrow\quad x \neq 1.$$

Logo $x = 1$ não faz parte do domínio da função $y(x)$, então iremos calcular o limite da função $y(x)$ quando x se aproxima de 1 para ver o que ocorre com a função. Caso a função se aproxime de $\pm\infty$, $x = 1$ será assíntota vertical.

Calculando o limite de $y(x)$ quando x se aproxima de 1 pela direita:

$$\lim_{x\to 1^{\pm}}\frac{x^2 - 3}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1^{\pm}}\frac{-2}{0} = -\infty \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 1} y(x) = -\infty$$

Portanto temos uma assíntota vertical de equação $x = 1$.

Para encontrar assíntotas horizontais, basta calcular o limite de $y(x)$ quando x tende a $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3}{(x-1)^2} \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3}{x^2-2x+1}$$

Para calcular este limite, basta usar a regra de cálculos de limites com polinômios quando x tende à $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2} \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to\infty} y(x)=1$$

Portanto a equação $y=1$ representa uma assíntota horizontal.

<u>Exercício 6 página 132:</u> O estudo da dissociação do tetróxido de dinitrogênio em dióxido de nitrogênio

$$N_2O_4\ (g) \leftrightarrows 2\ NO_2\ (g)$$

Conduz à seguinte constante de equilíbrio Kp:

$$Kp=\frac{4\alpha_e^{\,2}P}{1-\alpha_e^{\,2}}$$

onde α_e e é o grau de dissociação do tetróxido no equilíbrio e P é a pressão total do sistema. Calcule os limites do grau de dissociação quando a pressão tende a zero e ao infinito e interprete os resultados obtidos.

Dica: $\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim_{x\to a} f(x)}$

Primeiramente, devemos saber de qual função vamos calcular os limites pedidos no exercício. Segundo o enunciado, α_e é a nossa função e a pressão P é a variável independente, logo devemos encontrar a função α_e(P).

Para encontrar a função α_e(P), devemos rearranjar a expressão dada:

$$Kp=\frac{4\alpha_e^{\,2}P}{1-\alpha_e^{\,2}} \quad\Rightarrow\quad Kp(1-\alpha_e^{\,2})=4\alpha_e^{\,2}P \quad\Rightarrow\quad Kp-Kp\alpha_e^{\,2}=4\alpha_e^{\,2}P \Rightarrow \quad Kp=Kp\alpha_e^{\,2}+4\alpha_e^{\,2}P$$

$$\Rightarrow\quad Kp=\alpha_e^{\,2}(Kp+P) \quad\Rightarrow\quad \frac{Kp}{(Kp+P)}=\alpha_e^{\,2} \quad\Rightarrow\quad \sqrt{\frac{Kp}{(Kp+P)}}=\alpha_e(P)$$

Agora calculando o limite da função α_e(P) quando P tende a 0:

$$\lim_{P\to 0}\sqrt{\frac{Kp}{(Kp+P)}} \quad\Rightarrow\quad \sqrt{\lim_{P\to 0}\frac{Kp}{(Kp+0)}} \quad\Rightarrow\quad \sqrt{\lim_{P\to 0}\frac{Kp}{(Kp+0)}} \quad\Rightarrow\quad \lim_{P\to 0}\alpha_e(P)=1$$

Isto significa que a baixas pressões, o grau de dissociação se aproxima de 1, ou seja, à baixas pressões, o dióxido de nitrogênio é predominante no equilíbrio.

Agora, vamos calcular o limite da função α_e(P) quando a pressão tende ao infinito.

$$\sqrt{\lim_{P\to\infty}\frac{Kp}{(Kp+P)}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\lim_{P\to\infty}\frac{Kp}{(Kp+P)}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\lim_{P\to\infty}\frac{Kp}{(Kp+\infty)}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{P\to\infty}\alpha_e(P)=0$$

Quando a pressão tende ao infinito, a função α_{ε}(P) tende a 0 e como consequência imediata, temos que praticamente não ocorre dissociação e o tetróxido de dinitrogênio predomina.

<u>Exercício 7 página 132:</u> A partir da Mecânica Estatística, mostra-se que a energia de 1 mol de osciladores harmônicos em equilíbrio térmico à temperatura T é dada por

$$E(T)=\frac{N_{o}h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$$

onde N_o é o número de Avogadro, K é a constante de Boltzmann, h é a constante de Planck e υ é a frequência vibracional. Determine o limite de E quando T $\to 0$ e interprete o resultado obtido.

Calculando o limite da função $E(T)$ quando T $\to 0$:

$$\lim_{T\to 0}\frac{N_{o}h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} \quad \Rightarrow \quad \lim_{T\to 0}\frac{N_{o}h\nu}{e^{\frac{h\nu}{0k}}-1} \quad \Rightarrow \quad \lim_{T\to 0}\frac{N_{o}h\nu}{e^{\infty}-1} \quad \Rightarrow \quad \lim_{T\to 0}E(T)=0$$

Quando a temperatura se aproxima de 0, temos que a energia dos osciladores harmônicos se aproxima de 0.

Dica para quem tem curiosidade:

Procurem saber o que é um oscilador anarmônico e, caso o façam, pensem se o resultado obtido no cálculo do limite faria sentido para 1 mol de osciladores anârmonicos.